# Grado en Física

## Análisis Matemático I – Evaluación 1 - Soluciones

**Ejercicio 1.** Calcula los valores de $x \in \mathbb{R}$ para los que se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} \geqslant 6. \tag{1}$$

**Solución.** Las raíces de la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$ son $\alpha = 1 - \sqrt{5}$ y $\beta = 1 + \sqrt{5}$. Como la función racional en (1) no está definida en los ceros del denominador, en lo que sigue se supondrá que $x \neq \alpha$ y $x \neq \beta$. La desigualdad (1) puede escribirse en la forma:

$$0 \leqslant \frac{x^3 - 33}{x^2 - 2x - 4} - 6 = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 9}{x^2 - 2x - 4} \tag{2}$$

Multiplicando por $(x^2 - 2x - 4)^2 > 0$, esta última desigualdad es equivalente a:

$$(x^3 - 6x^2 + 12x - 9)(x^2 - 2x - 4) \geqslant 0. \tag{3}$$

Como el polinomio $x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ tiene la raíz 3, obtenemos fácilmente:

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = (x - 3)(x^2 - 3x + 3)$$

Como $x^2 - 3x + 3$ no tiene raíces reales, se verifica que $x^2 - 3x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, para estudiar la desigualdad (3) podemos prescindir de este factor. Hemos obtenido que la desigualdad (1) es equivalente a:

$$h(x) = (x - 3)(x - \alpha)(x - \beta) \geqslant 0.$$

Como $\alpha < 3 < \beta$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
x < \alpha \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de tres números negativos.}\\
\alpha < x < 3 \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de un número positivo y dos negativos.}\\
3 < x < \beta \quad &\Longrightarrow \quad h(x) < 0 \text{ porque es producto de dos números positivos y uno negativo.}\\
\beta < x \quad &\Longrightarrow \quad h(x) > 0 \text{ porque es producto de tres números positivos.}
\end{aligned}$$

Como, además, $h(3)=0$, concluimos que la desigualdad (1) es cierta para valores de $x$ en $]\alpha, 3] \cup ]\beta, +\infty[$. ☺

**Comentario.** Principal fallo: no simplificar la desigualdad (1) expresándola como en (2). Segundo fallo, multiplicar ambos lados de la desigualdad (1) por el denominador y afirmar que dicha desigualdad equivale a $x^3 - 33 \geqslant 6(x^2 - 2x - 4)$. Esto será así solamente cuando $x^2 - 2x - 4 > 0$, lo que no siempre es cierto. Tercer fallo: errores en cálculos elementales.

No es buena estrategia en este tipo de ejercicios estudiar por separado los intervalos en donde el numerador o el denominador son siempre positivos o siempre negativos. Esa forma de proceder complica innecesariamente las cosas. Hay quienes distinguen los casos en que el denominador es positivo o negativo para transformar, en cada caso, la desigualdad (1) en otra equivalente. Es un buen método para equivocarse.

En este tipo de ejercicios hay que transformar la desigualdad dada en otras *equivalentes* a ella.

El signo de $h(x) = (x - \alpha)(x - 3)(x - \beta)$ en cada intervalo puede estudiarse de muchas formas. Podemos, por ejemplo, evaluar $h(x)$ en un punto de cada intervalo. También podemos observar que $h(x)$ es un polinomio con coeficiente líder positivo, por lo que para valores de $x$ positivos y muy grandes será $h(x) > 0$, lo que nos dice que para $x > \beta$ es $h(x) > 0$. Ahora, como las raíces de $h(x)$ son simples, se produce un cambio de signo en cada una de ellas y volvemos a obtener el mismo resultado anterior.

Algunos calculan las raíces complejas de la ecuación $x^2 - 3x + 3 = 0$ y las *ordenan* junto con las raíces reales. Desconozco cómo se *ordenan* números complejos. Otros, operan de *forma extraña* con fracciones. Se supone que sabéis trabajar con fracciones.

Algunos usan números decimales. Lo repito: en esta asignatura no se permite usar números decimales. Además, las raíces que no son números enteros son números irracionales. Es falso que $\sqrt{2} = 1{,}414213562$. También es falso que:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696718753769480731766797379907324784 6$$

Hemos hecho en clase varios ejercicios como este. Este tipo de ejercicios de desigualdades es el que más hemos estudiado. Pocos habéis hecho completamente bien este ejercicio. Tú, ¿estudias o trabajas? Pues eso. ☹

**Ejercicio 2.** a) Calcula las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ y exprésalas en la forma $a + ib$.

b) Expresa en la forma $a + ib$ el número $\left(\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8$.

**Solución.**

a) Pongamos $w = z^2$. La ecuación $w^2 + 4w + 16 = 0$ tiene las soluciones

$$w_1 = \frac{-4+\sqrt{-48}}{2} = -2 + 2\sqrt{3}\,i \qquad w_2 = \frac{-4-\sqrt{-48}}{2} = -2 - 2\sqrt{3}\,i$$

Observa que como la ecuación $w^2 + 4w + 16 = 0$ tiene coeficientes reales ambas raíces son complejas conjugadas, como debe ser.

Las soluciones de la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ son $z_1 = \sqrt{w_1}$, $z_2 = -\sqrt{w_1}$, $z_3 = \sqrt{w_2}$ y $z_4 = -\sqrt{w_2}$. Donde, naturalmente, el símbolo $\sqrt{w}$ indica la raíz cuadrada principal de $w$. Observa que como la ecuación $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ tiene coeficientes reales, sus raíces complejas debe ser conjugadas dos a dos. Por tanto, solamente necesitamos calcular la raíz $z_1 = \sqrt{w_1}$ y las demás raíces serán: $z_2 = -z_1$, $z_3 = \overline{z_1}$ y $z_4 = -z_3$. Tenemos que $|w_1| = 4$ y $\arg(w_1) = -\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}) + \pi = 2\pi/3$. Por tanto $z_1 = 2(\cos(\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(\pi/3)) = 1 + i\sqrt{3}$.

b) Tenemos que $\left|\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right| = \dfrac{|-\sqrt{3}+i|}{|1-i|} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. Además:

$$\arg(-\sqrt{3}+i) = -\operatorname{arc\,tg}(1/\sqrt{3}) + \pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$$

Y $\arg(1-i) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -\pi/4$. Luego el número $\varphi = 5\pi/6 - (-\pi/4) = 13\pi/12$ es *un* argumento de $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{1-i}$ (observa que *no* es el argumento principal, pero eso no importa). Tenemos que:

$$\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i} = \sqrt{2}(\cos(\varphi) + i\,\operatorname{sen}(\varphi))$$

Usando la fórmula de De Moivre tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^8 &= (\sqrt{2})^8\big(\cos(8\varphi) + i\,\operatorname{sen}(8\varphi)\big) = 16\big(\cos(26\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(26\pi/3)\big) = \\ &= 16\big(\cos(8\pi + 2\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(8\pi + 2\pi/3)\big) = 16\big(\cos(2\pi/3) + i\,\operatorname{sen}(2\pi/3)\big) = \\ &= 16\big(-1/2 + i\sqrt{3}/2\big) = -8 + 8\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

**Comentario.** Aquí toda la dificultad es calcular módulos y argumentos de números complejos. Algunos no saben que $\sqrt{-48} = 4\sqrt{-3} = 4\sqrt{3}\,i$. En el ejercicio se piden las soluciones de la ecuación en la forma $a + ib$, por eso no vale dejar indicadas las raíces cuadradas. Hay que calcularlas. Hay errores bastante increíbles. El más frecuente es afirmar que $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Algunos desconocen el valor de $\operatorname{arc\,tg}(0)$ y $\operatorname{arc\,tg}(1)$. O, peor, afirman que ¡$\operatorname{arc\,tg}(0) = \pi/2$!. En la pizarra escribí los valores del seno y del coseno que se necesitan para este ejercicio. Pues ni por esas. Los valores del seno y del coseno de 0, $\pi/4$, $\pi/2$, $\pi/3$ y $\pi$ deben saberse de memoria; y a partir de ellos se pueden deducir los de la tangente y el arcotangente así como calcular otros valores. ¡Hay quien dice que la ecuación $w^2 + 4w + 16 = 0$ no tiene solución porque el discriminante es negativo! ¡Para eso sirven los números complejos! Para resolver ecuaciones que no tienen soluciones reales. Cometéis demasiados errores en cálculos tan sencillos. Nadie os puede enseñar a calcular, es algo que tenéis que aprender practicando. Muy pocos hacéis bien este ejercicio. ☹

**Ejercicio 3.** Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $w = \dfrac{z-1+i}{z+1-i}$ es:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

c) Un número de módulo 1.

**Solución.**

$$\begin{aligned} w &= \frac{z-1+i}{z+1-i} = \frac{x+iy-1+i}{x+iy+1-i} = \frac{(x-1)+i(y+1)}{(x+1)+i(y-1)} = \frac{\big((x-1)+i(y+1)\big)\big((x+1)-i(y-1)\big)}{(x+1)^2+(y-1)^2} = \\ &= \frac{(x+1)(x-1)+(y+1)(y-1)+i\big((y+1)(x+1)-(y-1)(x-1)\big)}{(x+1)^2+(y-1)^2} = \\ &= \frac{x^2+y^2-2}{(x+1)^2+(y-1)^2} + i\,\frac{2x+2y}{(x+1)^2+(y-1)^2} \end{aligned}$$

Por tanto:

a) $w$ es real, es decir $w \in \mathbb{R}$, equivale a $2x + 2y = 0$, es decir $y = -x$. Esto ocurre cuando el número $z = x + iy$ está en la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

b) $w$ es imaginario puro, es decir $w \in i\mathbb{R}$, es equivalente a $x^2 + y^2 - 2 = 0$, es decir el número $z = x + iy$ está en la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{2}$.

c) Tenemos que:

$$\begin{aligned} |w| = \frac{|(x-1)+i(y+1)|}{|(x+1)+i(y-1)|} = 1 &\iff |(x-1)+i(y+1)| = |(x+1)+i(y-1)| \iff \\ &\iff \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} \iff \\ &\iff (x-1)^2+(y+1)^2 = (x+1)^2+(y-1)^2 \iff y = x \end{aligned}$$

Por tanto, $|w| = 1$ cuando el número $z = x + iy$ está en la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. ☺

**Comentario.** Aquí todo se reduce a saber multiplicar y dividir números complejos. Hay fallos de todo tipo. Uno, que ya advertí en clase, es afirmar que $|u + iv| = \sqrt{u^2 + (iv)^2} = \sqrt{u^2 - v^2}$. Eso es un gran disparate. Algunos se empeñan en "resolver" curvas, como $x^2 + y^2 = 2$. Confundís curvas con ecuaciones.

La pregunta de teoría no la ha hecho bien casi nadie. Quizás el tiempo fue escaso (aunque si repasas los cálculos anteriores verás que no era tanto lo que había que hacer). Lo peor son las afirmaciones delirantes que algunos hacéis. Por ejemplo, hay quien afirma que *"La función arcoseno se puede considerar como la derivada del seno"* (¡¡☺☺!!). Hay quien afirma que $\operatorname{arc\,tg}(x) = \dfrac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{\operatorname{arc\,cos}(x)}$. Para otros es $\operatorname{arc\,sen}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x)}$ y $\operatorname{arc\,tg}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(x)}$. Quienes hacen tales afirmaciones no pueden entender absolutamente nada de Análisis Matemático. Son disparates de libro. También hay quien habla de la *"función* *contraria"* o de la *"función opuesta"* para referirse, supongo, a la *función inversa*. Hay algo que debe quedar claro: *en Matemáticas no todo vale*. En particular, *la terminología no te la puedes inventar a tu gusto*. No existe, que yo sepa, el concepto de *"función contraria"*; y la *"función opuesta"* de una función $f$ es la función $-f$. Nada de eso tiene relación con el concepto de *función inversa*.